EXERCICE n°1

ÉNONCÉ

Des fourmis se déplacent, en ligne droite, à la queue leu leu, à vitesse constante, en formant une colonne de 50 cm de long.
La dernière fourmi du groupe décide d'aller ravitailler la fourmi chef et pour cela rejoint la tête de la colonne puis, sa mission étant accomplie, retourne aussitôt à la queue de la colonne.
Sachant que, pendant cet aller-retour, la vitesse de cette fourmi est restée constante et que la colonne a parcouru 50 cm, quelle est la distance parcourue par la fourmi ravitailleuse ?

SOLUTION 1

(Rédaction Animath, Guadeloupe)

Soient : v la vitesse de la colonne en cm/s, V la vitesse de la fourmi, t_1 le temps aller de la fourmi et t_2 le temps retour.
La distance aller est $d_1 = Vt_1 = vt_1 + 50$.
La distance retour est $d_2 = Vt_2 = 50 - vt_2$.

D'où $t_1 = \dfrac{50}{V - v}$ et $t_2 = \dfrac{50}{V + v}$.

On obtient : $\dfrac{50v}{V - v} + \dfrac{50v}{V + v} = 50$.

En posant* $X = \dfrac{V}{v}$ on a alors $X^2 - 2X - 1 = 0$ d'où $V = (1 + \sqrt{2})v$.

En conclusion la distance parcourue est $50(1 + \sqrt{2})$ cm.

* N.D.L.R. : insistons sur la méthode (comme le fait l'académie de Versailles) : l'égalité précédente s'écrit, après réductions faciles, $2vV = V^2 - v^2$. Elle est **homogène** par rapport aux deux inconnues v et V. *Ce qui induit l'utilisation de leur rapport.*

SOLUTION 2

(de même type, mais la rédaction est plus détaillée)

Notons :
v_c et v_r les vitesses respectives de la colonne et de la fourmi ravitailleuse, t le temps du parcours complet c'est-à-dire le temps que met la fourmi ravitailleuse à retourner à sa place et t_1 le temps intermédiaire qui lui est nécessaire pour rejoindre la tête de la colonne.
La colonne a progressé de 50 cm donc $v_c t = 50$.

EXERCICE n°1

ÉNONCÉ

Des fourmis se déplacent, en ligne droite, à la queue leu leu, à vitesse constante, en formant une colonne de 50 cm de long.
La dernière fourmi du groupe décide d'aller ravitailler la fourmi chef et pour cela rejoint la tête de la colonne puis, sa mission étant accomplie, retourne aussitôt à la queue de la colonne.
Sachant que, pendant cet aller-retour, la vitesse de cette fourmi est restée constante et que la colonne a parcouru 50 cm, quelle est la distance parcourue par la fourmi ravitailleuse ?

SOLUTION 1

(Rédaction Animath, Guadeloupe)

Soient : v la vitesse de la colonne en cm/s, V la vitesse de la fourmi, t_1 le temps aller de la fourmi et t_2 le temps retour.
La distance aller est $d_1 = Vt_1 = vt_1 + 50$.
La distance retour est $d_2 = Vt_2 = 50 - vt_2$.
D'où $t_1 = \dfrac{50}{V-v}$ et $t_2 = \dfrac{50}{V+v}$.

On obtient : $\dfrac{50v}{V-v} + \dfrac{50v}{V+v} = 50$.

En posant* $X = \dfrac{V}{v}$ on a alors $X^2 - 2X - 1 = 0$ d'où $V = (1+\sqrt{2})v$.

En conclusion la distance parcourue est $50(1+\sqrt{2})$ cm.

* N.D.L.R. : insistons sur la méthode (comme le fait l'académie de Versailles) : l'égalité précédente s'écrit, après réductions faciles, $2vV = V^2 - v^2$. Elle est **homogène** par rapport aux deux inconnues v et V. *Ce qui induit l'utilisation de leur rapport.*

SOLUTION 2

(de même type, mais la rédaction est plus détaillée)

Notons :
v_c et v_r les vitesses respectives de la colonne et de la fourmi ravitailleuse, t le temps du parcours complet c'est-à-dire le temps que met la fourmi ravitailleuse à retourner à sa place et t_1 le temps intermédiaire qui lui est nécessaire pour rejoindre la tête de la colonne.
La colonne a progressé de 50 cm donc $v_c t = 50$.

Pendant le temps t_i, la colonne a progressé de $v_c t_i$ donc, la fourmi ravitailleuse qui a rejoint la tête a parcouru $50 + v_c t_i$ .Comme elle progresse à la vitesse de v_r, on peut écrire :

$$50 + v_c t_i = v_r t_i \qquad [1]$$

Pendant le temps qu'il reste c'est-à-dire $t - t_i$, la colonne parcourt encore $50 - v_c t_i$. Donc, pour revenir se placer en queue, la fourmi refait dans l'autre sens la distance $50 - (50 - v_c t_i) = v_c t_i$ qui la sépare de la fin de la colonne. Comme elle progresse à la vitesse de v, on peut écrire :

$$v_c t_i = v_r (t_i - t) \qquad [2]$$

Avec $v_c t = 50$, l'égalité [1] s'écrit : $v_c(t + t_i) = v_r t_i$ d'où $\dfrac{v_r}{v_c} = \dfrac{t + t_i}{t_i}$.

Et, l'égalité [2] s'écrivant aussi : $\dfrac{v_r}{v_c} = \dfrac{t_i}{t - t_i}$, on en déduit $\dfrac{t + t_i}{t_i} = \dfrac{t_i}{t - t_i}$.

D'où l'on tire directement $t = \sqrt{2}\, t_i$.

En conséquence, $\dfrac{v_r}{v_c} = \dfrac{\sqrt{2}\, t_i + t_i}{t_i} = \sqrt{2} + 1$ et donc $v_r = \left(\sqrt{2} + 1\right) v_c$. .

Conclusion : La distance totale parcourue par la fourmi ravitailleuse est donc, en cm :

$$v_r t = \left(\sqrt{2} + 1\right) v_c t = 50\left(\sqrt{2} + 1\right)$$

SOLUTION 3

(de même type selon une rédaction de Claude BAISNÉE,
lycée Dumont d'Urville, à Caen)

N.B. toutes les solutions de M. Claude BAISNÉE, notamment pour les quatre exercices traités à Caen, sont sur le site de l'Académie de Caen.

Claude BAISNÉE nous propose deux corrigés (ce seront nos solutions 3 et 4), avec des choix différents d'inconnues « On pourra ainsi constater - dit-il - combien ce choix influe sur la simplicité et la rapidité de la résolution ».

Voici le premier :

Soit f la vitesse de la fourmi ravitailleuse et c la vitesse de la colonne.

1ère étape : la fourmi ravitailleuse rejoint la tête de la colonne.
Soit t_1 la durée de cette étape.

Distance parcourue par la fourmi ravitailleuse : $f\, t_1$.
Distance parcourue par la colonne : $c\, t_1$.

Or la tête de la colonne et la fourmi ravitailleuse se déplacent dans le même sens et 50 cm les séparent au début. Donc la fourmi ravitailleuse a parcouru 50 cm de plus que la colonne :

$f t_1 = 50 + c t_1$ qui peut s'écrire $t_1 = \dfrac{50}{f - c}$ (relation 1).

2ème étape : la fourmi ravitailleuse retourne à l'arrière de la colonne.

Soit t_2 la durée de cette étape.

Distance parcourue par la fourmi ravitailleuse : $f t_2$.

Distance parcourue par la colonne : $c t_2$.

Or la fourmi ravitailleuse et la queue de la colonne se déplacent en sens inverse et 50 cm les séparent du début. Donc la somme des distances parcourues par la fourmi ravitailleuse et la colonne est égale à 50 cm :

$f t_2 + c t_2 = 50$ qui peut s'écrire $t_2 = \dfrac{50}{f + c}$ (relation 2).

La colonne, pendant le temps $t_1 + t_2$ a parcouru 50 cm d'où $c(t_1 + t_2) = 50$, soit, en utilisant les relations 1 et 2, $c\left(\dfrac{50}{f - c} + \dfrac{50}{f + c}\right) = 50$.

Par multiplication par $(f - c)(f + c)$ et division par 50, on obtient
$c(f - c) + c(f + c) = f^2 - c^2$ ou, après développement et réduction $f^2 - 2cf - c^2 = 0$.

Par division par c^2, cette égalité conduit à $\left(\dfrac{f}{c}\right)^2 - 2\,\dfrac{f}{c} - 1 = 0$.

$\dfrac{f}{c}$ est donc solution de l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$. Son discriminant est $\Delta = 8$ et les solutions sont $x_1 = \dfrac{2 + \sqrt{8}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{2 - \sqrt{8}}{2}$ soit $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ et $x_2 = 1 - \sqrt{2}$.

f et c étant des nombres positifs, $\dfrac{f}{c}$ est positif. Donc $\dfrac{f}{c} = 1 + \sqrt{2}$.

D'où $f = \left(1 + \sqrt{2}\right)c$.

Alors la distance parcourue par la fourmi est égale à celle parcourue par la colonne multipliée par le même facteur soit $50\left(1 + \sqrt{2}\right)$, c'est-à-dire environ 120,7 cm (à 1 mm près par défaut).

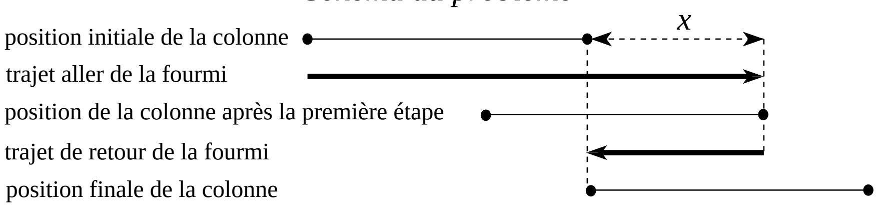
SOLUTION 4

(donc, toujours de Claude BAISNÉE ; également indiquée,
à une nuance rédactionnelle près, par l'équipe de Besançon)

Propriété : Lorsque deux mobiles de vitesses v et v' parcourent, pendant le même temps t, des distances d et d', le quotient $\frac{d}{d'}$ des distances parcourues est égal au quotient $\frac{v}{v'}$ des vitesses.

En effet $\frac{d}{d'} = \frac{vt}{v't}$ donc $\frac{d}{d'} = \frac{v}{v'}$.

Schéma du problème



Soit x la distance parcourue par la colonne pendant la première étape, c'est-à-dire pendant que la fourmi ravitailleuse rejoint la tête de la colonne. Pendant cette étape, la fourmi ravitailleuse et la colonne se déplacent dans le même sens, donc la fourmi parcourt 50 cm de plus que la colonne.

Quotient des distances parcourues et donc des vitesses : $\frac{x}{x+50}$.

Pendant la deuxième étape, la colonne parcourt la distance $50 - x$ puisqu'elle parcourt au total 50 cm. La fourmi ravitailleuse, pendant ce temps, parcourt la distance x (voir schéma).

Quotient des distances parcourues et donc des vitesses : $\frac{50-x}{x}$.

Or les vitesses sont restées constantes, donc $\frac{x}{x+50} = \frac{50-x}{x}$ qui équivaut à $x^2 = (50 - x)(50 + x)$ soit, après développement, réduction, et division par 2, $x^2 = 1250$.

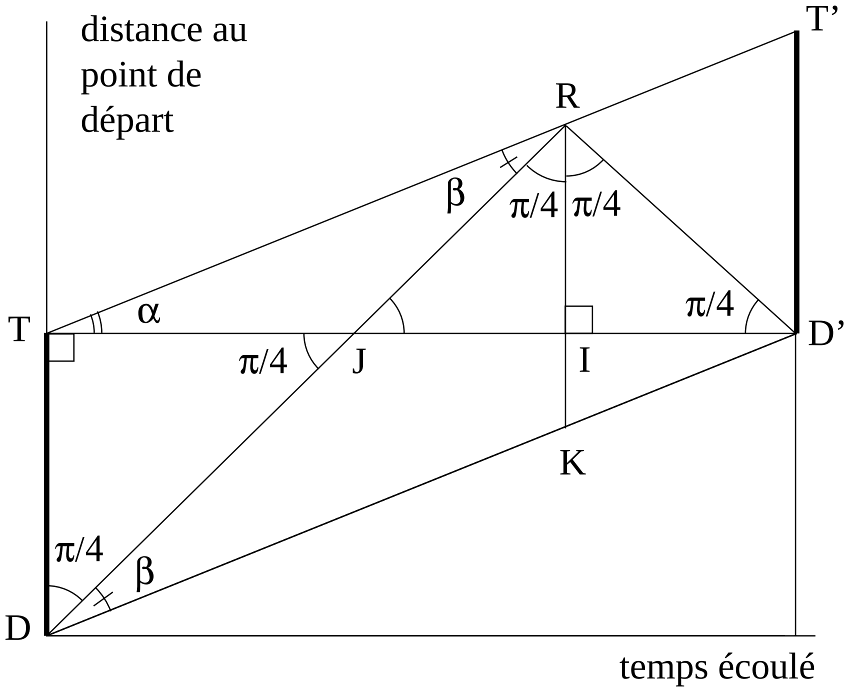
Cette dernière équation a pour unique solution $x = \sqrt{1250} = 25\sqrt{2}$ puisque x, qui est une distance, est un nombre positif.

La fourmi ravitailleuse a donc parcouru une distance égale à $50 + 2x$ soit $50 + 50\sqrt{2}$ cm, c'est-à-dire environ 120,7 cm (à 1mm près par défaut).

SOLUTION 5

Très belle solution graphique, due à Denis HARTEMAN, professeur à Besançon, au lycée Victor Hugo, que nous remercions et félicitons chaleureusement.

On représente la distance qui sépare les fourmis de leur point de départ en fonction du temps écoulé. La vitesse étant constante, *DD'* et *TT'* sont des segments... de pente la vitesse en question.
La fourmi ravitailleuse marchant elle aussi à vitesse constante et revenant sur ses pas, les angles *DRK* et *KRD'* sont égaux.
La distance totale parcourue par cette fourmi est $50 + 2RI$.
Quitte à changer l'unité sur l'axe du temps, on peut supposer que l'angle DRD' est droit.



Les points *T* et *R* sont sur le cercle de diamètre *DD'* et donc les angles *RTD'* et *RDD'* qui interceptent le même arc sont égaux. Autrement dit, $\alpha = \beta$.
Donc le triangle *TJR* est isocèle en *J* et $JR = JT = 50$. D'où : $RI = 25\sqrt{2}$.

Conclusion : La distance parcourue par la fourmi ravitailleuse est $50(1 + \sqrt{2})$.

Remarque :
Une autre méthode, moins élégante (puisqu'il y a un calcul), consiste à remarquer que les triangles *TD'T'* et *D'IK* étant semblables,

$$\frac{IK}{ID'} = \frac{D'T'}{D'T} \text{ c'est-à-dire } \frac{50 - RI}{RI} = \frac{50}{50 + 2RI}$$

Cette dernière égalité donnant directement $RI = 25\sqrt{2}$ ...

COMMENTAIRES

1) Un commentaire général de Michel REGNAULT, lycée Napoléon. L'AIGLE. Académie de Caen.

Un grand classique revisité ! Sorti du domaine de la cinématique où cohabitent pacifiquement mathématique et physique, sa résolution demande de bien décomposer le mouvement en ses deux phases aller et retour.

Il paraît naturel d'introduire, comme inconnues, la vitesse c de la colonne, celle f de la ravitailleuse et les deux durées de parcours, mais après élimination des temps, on aboutit à une forme quadratique en f et c, dont les quelques élèves qui y sont parvenus, n'ont pas su se débrouiller...n'ayant pas vu que la détermination de f/c suffisait pour conclure.

Une deuxième méthode, ici méthode 4, basée sur la remarque que, les mouvements étant uniformes, pour un même intervalle de temps, le rapport des vitesses est égal à celui des distances parcourues, permet d'obtenir directement une équation du second degré dont la seule inconnue est la distance parcourue par la colonne durant la première phase.

Pour Caen, le pourcentage de succès est faible. Beaucoup de fautes grossières par manque d'analyse, mais plusieurs exposés corrects à partir de la deuxième méthode, parfois de façon étrangement elliptique, ce qui laisse à penser que le problème avait, pour certains, un air de déjà vu. C'est le risque pris quand on propose un classique, mais, après tout, il n'est pas interdit d'avoir un peu de culture !

Est-il utile de proposer quelques références ? (non exhaustives) : on trouvera une mouture militaro-équestre dans « les casse-tête mathématiques de Sam Loyd » par Martin Gardner (Dunod), qui contient la version simple, remontée d'une colonne, et une version plus épicée, chemin reliant les sommets d'un carré animé d'un mouvement rectiligne uniforme, un remake motocycliste dans Jeux et Stratégies (n°43), toutes reprises dans le manuel de 1ère S Collection Terracher (Hachette).

2) Partout les résultats sont mitigés :

- Cet exercice avait été proposé par l'Académie d'Amiens. Son équipe a été « surprise » par les résultats, pas bons du tout dans cette académie : « Est-ce - dit Michel TIXIER - le mélange “Mathématiques - Cinématique” de la relation $d = vt$ qui a fait peur aux candidats ? »

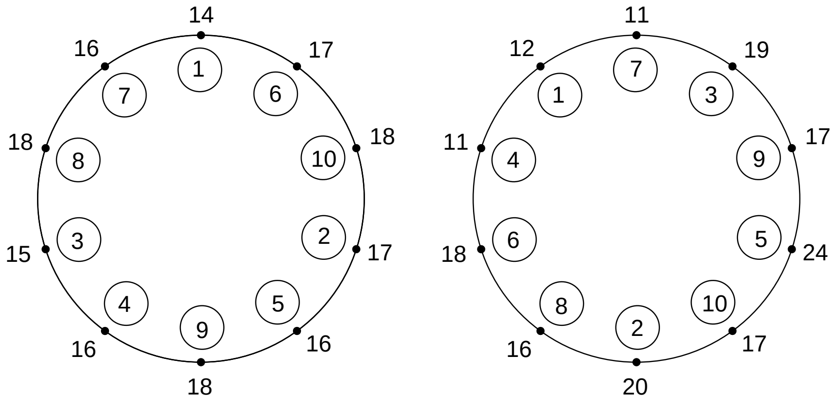
Exercices nationaux

- Exercice pas bien réussi, « contrairement aux attentes », « sauf par quelques astucieux », (par exemple à La Réunion, en Corse,...)
- Mais une Académie (Bordeaux) signale que « l'exercice a été résolu par beaucoup d'élèves ».
- Une autre (Nantes) signale qu'une quinzaine d'élèves (sur 256 présents) a réussi l'exercice, et qu'un élève a proposé une représentation graphique et utilisant des représentations de droites (N.D.L.R. : cf. solution 5. Bravo pour cet élève !).
- « De nombreux candidats ont été gênés par le fait que la vitesse de la colonne des fourmis n'était pas donnée ». elle était effectivement inutile. Et on peut réfléchir au « pourquoi ? » correspondant.
- On a noté, ici ou là, `« une solution très rapide de certains candidats qui ont pris comme inconnue la distance parcourue par la colonne jusqu'au moment du ravitaillement ».
- ...et ... « les meilleurs candidats traitent généralement bien ce premier exercice ».

SOLUTIONS

Question 1 :

• En s'en tenant scrupuleusement à l'énoncé, voici des exemples de répartition, proposés par Besançon et Cl. Baisnée :



Les jetons sont à l'intérieur et les points à l'extérieur.
La moyenne des gains est 16,5.

• Certaine réponses anticipent sur la Question 2.

Question 2 :

La somme inscrite sur chaque jeton intervient trois fois : une fois directement, pour le possesseur du jeton, et une fois pour chacun de ses voisins.

De là le total des gains :

$$3 \times (1 + 2 + \ldots + 9 + 10) \quad = \quad 3 \times 55 = 165 \text{ (il est constant)}$$

et leur moyenne : 16,5 (donc constante).

Si personne ne recevait plus de 16 €, la moyenne serait inférieure ou égale à 16 €. Comme il n'en est pas ainsi, il y a au moins un gain strictement supérieur à 16 €, donc au moins égal à 17 €.

Question 3 :

Le premier exemple cité à la question 1 convient.
Divers jurys académiques et Animath proposent, en complément, une stratégie pour construire de telles répartitions :

On met à part le 1 et on répartit les 9 autres jetons par groupes de trois consécutifs. Soit α, β, γ, dans l'ordre décroissant, un tel groupement. La somme $\alpha + \beta + \gamma$ est le gain du joueur qui fait face à β. Donc, en exigeant que tous les gains soient inférieurs ou égaux à 18, cette condition se répercute sur les groupements par trois jetons.

Comme, de plus, la somme 55 des points de tous les jetons est égale à $1 + 3 \times 18$, il s'ensuit que chaque $\alpha + \beta + \gamma$ est égal à 18.

Recherchons donc les partitions de 18 en trois nombres choisis de 2 à 10.

Nous obtenons :	10 + 6 + 2 ;	10 + 5 + 3 ;	9 + 7 + 2
	9 + 6 + 3 ;	9 + 5 + 4 ;	8 + 7 + 3
	8 + 6 + 4 ;	7 + 6 + 5.	

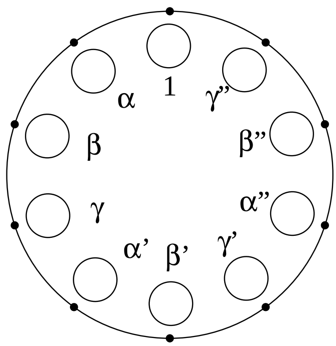
Le choix initial de 10 + 6 + 2, par exemple, entraîne les deux autres (pas de recouvrements !)
Avec {10 ; 6 ; 2}, ce sera {9 ; 5 ; 4} et {8 ; 7 ; 3}
Avec {10 ; 5 ; 3}, ce sera {9 ; 7 ; 2} et {8 ; 6 ; 4}
Tandis que {9 ; 6 ; 3} et {7 ; 6 ; 5} ne peuvent s'associer à rien.

Dans chacune des deux associations possibles, il existe plusieurs solutions :
Ainsi, avec la première, on peut avoir la suite 1 ; 10 ; 6 ; 2 ; 9 ; 5 ; 4 ; 8 ; 3 ; 7 (mais surtout pas {8 ; 7 ; 3} ou la suite du premier dessin ou « la disparition symétrique par rapport au diamètre passant par 1 »). Bien vérifier si tous les gains sont inférieurs ou égaux à 18 ; *la contrainte de la partition de 18 en trois* $\{\alpha ; \beta ; \gamma\}$ *est nécessaire mais pas suffisante !* (ainsi la suite de jetons 1 ; 10 ; 6 ; 2 ; 4 ; 9 ; 5 ; 8 ; 7 ; 3 ne convient pas : en face du 5 le gain serait 22 et 20 en face du 8).

Question 4 :

Méthode 1 : qui utilise les trois groupements donnés, en complément, à la question 3 et que que nous réexpliquons :

Supposons tous le gains inférieurs ou égaux à 17.
Alors $\alpha + \beta + \gamma$, qui est le gain du joueur qui fait face à β, est inférieur ou égal à 17.
De même $\alpha' + \beta' + \gamma'$ et $\alpha'' + \beta'' + \gamma''$.
Mais alors la somme des nombres des 10 jetons serait inférieure ou égale à $1 + 17 \times 3$, c'est-à-dire 52. Or elle vaut 55 !
Il existe donc nécessairement au moins un gain supérieur ou égal à 18.
Les deux exemples de la Question 1 fournissent un cas de gain maximum, égal à 18, réalisé trois fois, et un cas où il y a un gain 18 et trois gains supérieurs (19 ; 20 ; 24).



Méthode 2 :

Elle est fondée sur deux observations :

1 - Deux voisins ont nécessairement des gains distincts : sinon, l'un gagnant $a + b + c$, et l'autre $b + c + d$, il s'ensuivrait $a = d$, ce qui est impossible. Donc il y a au maximum cinq joueurs qui ont le même gain.

2 - Le total des gains est 165. Si l'on n'envisage pas de gain strictement supérieur à 17, ce total ne peut être atteint qu'en compensant au maximum les gains strictement inférieurs à 17. *Cela conduit à cinq gains 17 et cinq gains 16, comme condition nécessaire.*

Est-elle suffisante ?

Examinons ce qui se passe sur les jetons.

Plaçons-les dans l'ordre croissant a_1, a_2, … , le jeton a_i portant le nombre i.

Compte tenu de l'alternance des 16 et des 17, nous aurons, par exemple, $a_1 + a_2 + a_3 = 16$ ou $a_1 + a_2 + a_3 = 17$, puis, dans le premier cas $a_2 + a_3 + a_4 = 17$, ce qui donne $a_4 - a_1 = 1$. Or, déjà, $a_2 - a_1 = 1$, ce qui exigerait $a_4 = a_2$, ce qui est impossible.

Idem avec le choix $a_1 + a_2 + a_3 = 17$.

Conclusion : il est impossible qu'il n'y ait pas de gain strictement supérieur à 17 €.

Variante pour l'observation (2). (Extraite d'un corrigé diffusé, entre autres, par Besançon) :

• Supposons que le gain maximum soit 17 € et notons n le nombre de personnes gagnant 17 €. Compte tenu de la remarque précédente, on a $n \leqslant 5$.

Les $10 - n$ autres personnes reçoivent en moyenne, en euros, $\dfrac{165 - 17n}{10 - n} = 17 - \dfrac{5}{10 - n}$.

Mais si $n < 5$, alors $17 - \dfrac{5}{10 - n} > 16$ ce qui n'est pas possible, ces personnes gagnant au maximum 16 € chacune, donc $n = 5$.

Enfin, quand $n = 5$, la moyenne des gains des 5 autres personnes est égale, en euros, à $17 - \dfrac{5}{10 - n} = 16$. Comme elles ne gagnent pas plus de 16 €, on en déduit qu'elles gagnent chacune exactement 16 €.

Variante pour la suite (même source)

En notant a, b, c, etc. les jetons dans l'ordre, a étant celui de quelqu'un qui gagne 16 €, on a :

$$\begin{cases} a + b + c = 17 \\ b + c + d = 16 \\ c + d + e = 17 \\ d + e + f = 16 \\ e + f + g = 17 \end{cases}$$

Les deux premières lignes et les deux dernières donnent respectivement $a - d = 1$ et $g - d = 1$. On en déduit $a = g$, ce qui est impossible.